SF1624 Algebra och geometri

Tionde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

12 november, 2009

Reducerad trappstegsform

Vi kan fortsätta från trappstegsformen och eliminera ovanför de ledande ettorna och får då matrisen på reducerad trappstegsform

Exempel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Varje nollskild rad inleds med en ledande etta som första nollskilda element.
- De ledande ettorna står längre till höger ju längre ned vi läser och är ensamma nollskilda element i sina kolonner.
- Eventuella nollrader står längst ned.

Linjära ekvationssystem och linjära avbildningar

När vi skriver ekvationssystemet som

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dvs

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

ser vi att lösningarna svarar på frågan;

VIlka vektorer $\overline{x}$ i $\mathbb{R}^n$ avbildas på vektorn $\overline{b}$ i $\mathbb{R}^m$ av den linjära avbildningen T med matris A?

eftersom

$$A\overline{x} = \overline{b} \Longleftrightarrow T(\overline{x}) = \overline{b}.$$

Linjära ekvationssystem med flera högerled

När vi använder en totalmatris för att lösa ett linjärt ekvationssystem kan vi hantera flera högerled samtidigt:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,r} \end{array}\right)$$

Exempel

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Radoperationer och elementära matriser

Sats

Varje elementär radoperation på en matris med m rader motsvarar multiplikation med en elementär matris till vänster:

1. *För $1 \leq i \neq j \leq m$ är $E_{i,j}(a)$ matrisen som fås från identitetsmatrisen I_m genom att addera a gånger rad j till rad i.*
2. *För $1 \leq i \leq m$ och $a \neq 0$ är $E_i(a)$ matrisen som fås från identitetsmatrisen I_m genom att multiplicera rad i med a.*
3. *För $1 \leq i \neq j \leq m$ är $E_{i,j}$ matrisen som fås från identitetsmatrisen I_m genom att byta plats på rad i och rad j.*

Identitetsmatrisen som högerled

Resultatet av alla radoperationer som gjorts kan ”sparas” genom att ha ideintitetsmatrisen som högerled

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right)$$

Om den reducerade trappstegsformen för A är I har vi efter alla radoperationer fått

$$\left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array} \right)$$

där B är produkten av alla de radoperationer som gör om A till I. Det betyder att $BA = I$ och vi kan lösa ekvationen

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

genom att multiplicera med B och får

$$AB\overline{x} = I\overline{x} = \overline{x} = B\overline{b}$$

Vi kallar då B för inversmatrisen till A och skriver den som A^{-1}.